

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Методические рекомендации
к выполнению контрольных работ
по учебной дисциплине
"ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ"
для иностранных студентов
отрасли знаний 0305
"Экономика и предпринимательство"
заочной формы обучения**

Харьков. Изд. ХНЭУ, 2013

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и экономико-математических методов.

Протокол № 7 от 20.03.2013 г.

Составители: Малярец Л. М.

Железнякова Э. Ю.

Лебедева И. Л.

Норик Л. А.

М54 Методические рекомендации к выполнению контрольных работ по учебной дисциплине "Оптимизационные методы и модели" для иностранных студентов отрасли знаний 0305 "Экономика и предпринимательство" заочной формы обучения / сост. Л. М. Малярец, Э. Ю. Железнякова, И. Л. Лебедева и др. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2013. – 40 с. (Русск. яз.)

Предложены задачи для контрольной работы по данной учебной дисциплине, а также образец их выполнения. Все решения сопровождаются сжатым изложением теоретического материала.

Рекомендовано для студентов отрасли знаний 0305 "Экономика и предпринимательство" заочной формы обучения.

Введение

Основной формой занятий студента заочной формы обучения является самостоятельная работа над теоретическим материалом и выполнение контрольных работ.

Контрольная работа, которую должен выполнить студент в пределах программы учебной дисциплины "Оптимизационные методы и модели", содержит задачи, непосредственно связанные с вопросами организации и планирования производства, оптимизации различных сфер его деятельности. Компетентности, которые приобретает студент во время работы над учебным материалом, также нужны для создания у него как у будущего специалиста теоретической базы, необходимой современному экономисту.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с теоретическим материалом, который излагается в методических рекомендациях кафедры высшей математики и экономико-математических методов, а также в рекомендованной литературе по данной дисциплине.

Контрольная работа содержит четыре задачи, номера которых студент определяет согласно своему номеру в списке учебной группы. Если номера задач частично или полностью не отвечают нужному варианту, то такая работа не может считаться выполненной.

Контрольная работа оформляется в отдельной тетради, при этом решение каждой последующей задачи необходимо начинать с новой страницы. Решение задач приводится в порядке возрастания их номеров. Непосредственно изложению решения каждой задачи должно предшествовать ее условие.

Если в работе были допущены ошибки, то их нужно исправить и результаты привести в конце тетради или в новой тетради. К экзамену по данной дисциплине допускаются только те студенты, которые полностью выполнили контрольную работу.

Контрольная работа

Задача 1. Используя графический метод, определить оптимальный план и соответствующее ему значение функции цели задачи линейного программирования, математическая модель которой дана в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные задачи 1

1.1	$z = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 6 - x_2 \geq 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 12 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.2	$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 - 6 \leq 0, \\ 2x_2 - 11 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.3	$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 24 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.4	$z = -3x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 40 \leq 0, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$
1.5	$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$	1.6	$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 + 2 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 + 5 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.7	$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 - 7 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.8	$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 5, \\ -3x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

1.9	$z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 + 4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.10	$z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.11	$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_2 - 3 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.12	$z = -3x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 6 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.13	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_2 - 13 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 - 8 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.14	$z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 - 4 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.15	$z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ x_1 - 5 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.16	$z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 12 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.17	$z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ 5x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ 4 - x_1 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.18	$z = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ -x_2 + 9 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

1.19	$z = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ -2x_1 + 3 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.20	$z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ -2x_2 + 10 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.21	$z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.22	$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.23	$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 15x_1 + 8x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.24	$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.25	$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 15x_1 + 8x_2 \leq 120, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.26	$z = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
1.27	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ x_2 - 4 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.28	$z = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

1.29	$z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$	1.30	$z = 8x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$
------	--	------	---

Задача 2. Для изготовления двух видов изделий A и B предприятие используют три типа сырья R_1 , R_2 и R_3 . По технологии, которая используется для производства продукции, на изготовление единицы изделия вида A нужно израсходовать сырья первого типа в количестве α_1 кг, второго – α_2 кг и третьего – α_3 кг. Соответственно на изготовление единицы изделия вида B нужно израсходовать сырья первого типа в количестве β_1 кг, второго – β_2 кг и третьего – β_3 кг. Производство обеспечено сырьем первого типа в количестве P_1 кг, второго – P_2 кг и третьего – P_3 кг. Прибыль от реализации единицы продукции каждого вида составляет c_1 и c_2 условных единиц соответственно.

С помощью симплексного метода составить оптимальный план производства, по которому цех получал бы максимальную прибыль, и определить размер этой прибыли.

Номера задач и соответствующие им исходные данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исходные данные задачи 2

Номер задачи	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	R_1	R_2	R_3	c_1	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2.1	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
2.2	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9
2.3	4	3	3	3	4	5	700	630	750	6	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2.4	8	6	3	2	3	2	840	870	500	6	5
2.5	2	3	2	3	6	8	428	672	672	3	8
2.6	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5
2.7	6	5	3	3	10	12	714	910	948	3	9
2.8	3	6	8	2	3	2	560	870	840	3	2
2.9	2	3	3	1	6	7	438	747	812	7	5
2.10	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	2
2.11	3	6	9	8	7	4	768	807	801	3	2
2.12	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	5
2.13	4	3	3	8	11	5	616	627	453	2	5
2.14	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
2.15	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	4
2.16	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
2.17	1	7	69	3	3	3	650	1365	1245	6	5
2.18	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	6
2.19	16	8	5	4	7	9	784	552	567	4	6
2.20	8	6	3	2	4	3	830	860	900	5	3
2.21	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	3
2.22	9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2
2.23	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
2.24	2	3	3	5	2	3	380	273	300	2	5
2.25	12	10	3	3	5	6	684	690	558	6	2
2.26	11	8	5	3	4	3	671	588	423	5	2
2.27	9	6	3	4	7	8	945	864	864	3	2
2.28	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
2.29	5	3	2	2	3	3	505	393	348	7	6
2.30	5	3	6	10	12	3	910	948	714	9	3

Задача 3. Для матричной игры "Покупатель – Продавец", которая задана платежной матрицей Π (табл. 3), вычислить нижнюю и верхнюю границы цены игры, определить цену игры и оптимальные стратегии каждого из игроков, используя графический метод решения.

Исходные данные задачи 3

3.1	$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T$	3.2	$\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
3.3	$\Pi = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 7 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	3.4	$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}^T$
3.5	$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T$	3.6	$\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
3.7	$\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$	3.8	$\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$
3.9	$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T$	3.10	$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
3.11	$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	3.12	$\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T$
3.13	$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}^T$	3.14	$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & -1 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
3.15	$\Pi = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	3.16	$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 5 & 2 \\ 6 & 10 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}^T$
3.17	$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	3.18	$\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T$
3.19	$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$	3.20	$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T$

3.21	$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 12 & 9 & 5 \end{pmatrix}^T$	3.22	$\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 7 & 9 \\ 6 & 7 & -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
3.23	$\Pi = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}^T$	3.24	$\Pi = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
3.25	$\Pi = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}$	3.26	$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}^T$
3.27	$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T$	3.28	$\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
3.29	$\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	3.30	$\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 11 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 4. В трех пунктах отправления A_1 , A_2 и A_3 сосредоточен однородный груз в количестве, которое описывается матрицей A . Потребности в этой продукции для потребителей B_1 , B_2 , B_3 и B_4 описываются матрицей B . Стоимость перевозки груза от каждого пункта отправления каждому потребителю определяется матрицей $C = (c_{ij})_{3 \times 4}$, где c_{ij} ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$) равняется стоимости перевозки единицы груза от i -го поставщика j -му потребителю.

Необходимо составить оптимальный план перевозок, по которому общие транспортные затраты на перевозку груза от поставщиков к потребителям были бы минимальными, и определить стоимость затрат в соответствии с оптимальным планом. При этом для составления исходного опорного плана использовать как метод северо-западного угла, так и метод минимальной стоимости. Исходный опорный план, которому соответствует меньшая стоимость перевозок, проверить на оптимальность с помощью метода потенциалов и в дальнейшем улучшать именно этот план.

Исходные данные задачи 4

4.1	$\mathbf{A} = (115; 90; 205)^T;$ $\mathbf{B} = (95; 150; 85; 80);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 16 & 6 \\ 12 & 10 & 11 & 13 \\ 14 & 19 & 15 & 9 \end{pmatrix}$	4.2	$\mathbf{A} = (120; 180; 200)^T;$ $\mathbf{B} = (90; 120; 80; 110);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 11 & 10 \\ 17 & 9 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 19 & 9 \end{pmatrix}$
4.3	$\mathbf{A} = (150; 90; 120)^T;$ $\mathbf{B} = (80; 90; 140; 50);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 & 12 \\ 13 & 9 & 14 & 11 \\ 15 & 19 & 18 & 9 \end{pmatrix}$	4.4	$\mathbf{A} = (170; 190; 120)^T;$ $\mathbf{B} = (130; 150; 100; 100);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 13 & 17 \\ 15 & 10 & 8 & 14 \end{pmatrix}$
4.5	$\mathbf{A} = (170; 195; 205)^T;$ $\mathbf{B} = (120; 145; 125; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 16 & 8 \\ 9 & 18 & 15 & 6 \\ 14 & 19 & 17 & 13 \end{pmatrix}$	4.6	$\mathbf{A} = (170; 105; 205)^T;$ $\mathbf{B} = (420; 245; 100; 255);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 18 & 7 \\ 9 & 12 & 14 & 6 \\ 3 & 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$
4.7	$\mathbf{A} = (230; 180; 215)^T;$ $\mathbf{B} = (120; 165; 240; 100);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 17 & 20 \\ 13 & 16 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 14 & 9 \end{pmatrix}$	4.8	$\mathbf{A} = (270; 195; 215)^T;$ $\mathbf{B} = (130; 145; 225; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 8 & 11 \\ 11 & 17 & 7 & 15 \\ 9 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix}$
4.9	$\mathbf{A} = (250; 195; 205)^T;$ $\mathbf{B} = (160; 165; 110; 185);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 17 & 12 \\ 18 & 13 & 20 & 11 \\ 8 & 16 & 14 & 10 \end{pmatrix}$	4.10	$\mathbf{A} = (140; 190; 210)^T;$ $\mathbf{B} = (100; 145; 115; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 10 & 13 \\ 7 & 3 & 14 & 8 \\ 11 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

4.11	$\mathbf{A} = (240; 185; 215)^T;$ $\mathbf{B} = (180; 165; 100; 145);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 17 & 12 \\ 10 & 14 & 20 & 11 \\ 8 & 16 & 12 & 10 \end{pmatrix}$	4.12	$\mathbf{A} = (160; 180; 230)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 165; 115; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 12 \\ 7 & 13 & 14 & 8 \\ 11 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$
4.13	$\mathbf{A} = (150; 240; 2050)^T;$ $\mathbf{B} = (170; 150; 140; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 17 & 12 \\ 15 & 8 & 10 & 11 \\ 8 & 16 & 14 & 6 \end{pmatrix}$	4.14	$\mathbf{A} = (160; 125; 255)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 140; 140; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 10 & 13 \\ 7 & 9 & 14 & 10 \\ 9 & 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$
4.15	$\mathbf{A} = (150; 150; 210)^T;$ $\mathbf{B} = (160; 160; 120; 140);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 8 & 12 \\ 18 & 19 & 20 & 9 \\ 8 & 8 & 14 & 10 \end{pmatrix}$	4.16	$\mathbf{A} = (240; 150; 170)^T;$ $\mathbf{B} = (90; 245; 115; 160);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 10 \\ 17 & 9 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 15 & 9 \end{pmatrix}$
4.17	$\mathbf{A} = (170; 190; 120)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 140; 140; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 11 & 10 \\ 10 & 9 & 12 & 12 \\ 13 & 8 & 16 & 9 \end{pmatrix}$	4.18	$\mathbf{A} = (240; 170; 190)^T;$ $\mathbf{B} = (190; 240; 120; 140);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 8 & 10 \\ 14 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 15 & 9 \end{pmatrix}$
4.19	$\mathbf{A} = (150; 190; 120)^T;$ $\mathbf{B} = (180; 120; 110; 140);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 8 & 12 \\ 18 & 9 & 10 & 9 \\ 8 & 12 & 14 & 8 \end{pmatrix}$	4.20	$\mathbf{A} = (140; 250; 170)^T;$ $\mathbf{B} = (120; 240; 140; 110);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 6 \\ 9 & 12 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

4.21	$\mathbf{A} = (150; 130; 210)^T;$ $\mathbf{B} = (160; 80; 120; 110);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 8 & 10 \\ 9 & 7 & 14 & 10 \end{pmatrix}$	4.22	$\mathbf{A} = (190; 150; 170)^T;$ $\mathbf{B} = (90; 250; 110; 160);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 12 & 14 & 12 \\ 13 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$
4.23	$\mathbf{A} = (170; 150; 190)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 160; 130; 140);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 8 & 12 \\ 6 & 9 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 14 & 10 \end{pmatrix}$	4.24	$\mathbf{A} = (140; 150; 170)^T;$ $\mathbf{B} = (210; 140; 110; 120);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 & 10 \\ 12 & 9 & 16 & 12 \\ 13 & 8 & 15 & 9 \end{pmatrix}$
4.25	$\mathbf{A} = (180; 120; 210)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 160; 190; 100);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 14 & 7 \end{pmatrix}$	4.26	$\mathbf{A} = (260; 150; 150)^T;$ $\mathbf{B} = (90; 210; 12; 160);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 10 \\ 8 & 9 & 6 & 12 \\ 13 & 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$
4.27	$\mathbf{A} = (180; 120; 210)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 160; 190; 100);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 10 & 13 \\ 7 & 3 & 14 & 8 \\ 11 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$	4.28	$\mathbf{A} = (260; 150; 150)^T;$ $\mathbf{B} = (90; 210; 12; 160);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 8 & 11 \\ 11 & 17 & 7 & 15 \\ 9 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix}$
4.29	$\mathbf{A} = (170; 190; 120)^T;$ $\mathbf{B} = (110; 140; 140; 180);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 18 & 7 \\ 9 & 12 & 14 & 6 \\ 3 & 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$	4.30	$\mathbf{A} = (240; 170; 190)^T;$ $\mathbf{B} = (190; 240; 120; 140);$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 13 & 17 \\ 15 & 10 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

Образец выполнения контрольной работы

Задача 1. Используя графический метод, определить оптимальный план и соответствующее ему значение функции цели задачи линейного программирования, математическая модель которой имеет вид:

$$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ -x_1 + x_2 - 5 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Решение. Математическая модель задачи линейного программирования содержит функцию нескольких переменных, которая исследуется на экстремум определенного вида (1), и систему неравенств (2), которая описывает ограничения, накладываемый на значения аргументов этой функции. Множество решений системы ограничений представляет собой множество планов задачи линейного программирования. Они образуют многоугольник планов. Поскольку аргументы функции цели не могут быть отрицательными, то есть существуют ограничения на знак, то многоугольник планов расположен в I-ой четверти координатной плоскости. Оптимальным является тот план, при котором функция цели достигает экстремума требуемого вида.

Построим многоугольник планов, который определяется системой ограничений рассматриваемой модели. Для этого каждое из неравенств системы (2) преобразуем в уравнение и на координатной плоскости проведем прямые, соответствующие этим уравнениям. Координаты двух точек, через которые проводим прямую, можно определить, например, приведя ее уравнение к виду:

$$L: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1,$$

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой L на осях $0x_1$ и $0x_2$.

Отсюда получаем координаты точек $(a; 0)$ и $(0; b)$, принадлежащих прямой L .

В рассматриваемом примере для нахождения многоугольника планов, который определяется системой ограничений (2), в I-ой четверти координатной плоскости (с учетом ограничения на знак: $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$) построим прямые:

$$L_1: 4x_1 + 5x_2 = 40 \Rightarrow \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{8} = 1;$$

$$L_2: 2x_1 + 3x_2 = 6 \Rightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;$$

$$L_3: -x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{5} = 1;$$

$$L_4: x_2 = 1.$$

Затем для каждой из этих прямых определим ту полуплоскость, в которой данное неравенство выполняется. С этой целью в рассматриваемое неравенство подставим координаты любой точки при условии, что она не принадлежит данной прямой. Например, для первого неравенства системы (2) выбираем точку $O(0; 0)$ и подставим ее координаты в первое неравенство. Получаем: $4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 40$. Поскольку полученное неравенство представляет собой верное числовое неравенство, то эта точка принадлежит полуплоскости, в которой данное неравенство верно. Укажем эту полуплоскость стрелками, перпендикулярными к прямой L_1 (рис. 1). Повторив эту операцию для каждого неравенства основной системы ограничений, находим ту часть плоскости, где выполняются все неравенства системы ограничений, она и является многоугольником планов задачи линейного программирования (на рис. 1 многоугольник планов выделен штриховкой). Координаты точек $\mathbf{X}(x_1; x_2)$, образующих этот многоугольник, представляют собой все возможные решения системы ограничений (2). Теперь среди этих планов необходимо выбрать оптимальный план $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$, при котором функция цели (1) будет достигать максимального значения: $z_{\max} = z(\mathbf{X}^*)$.

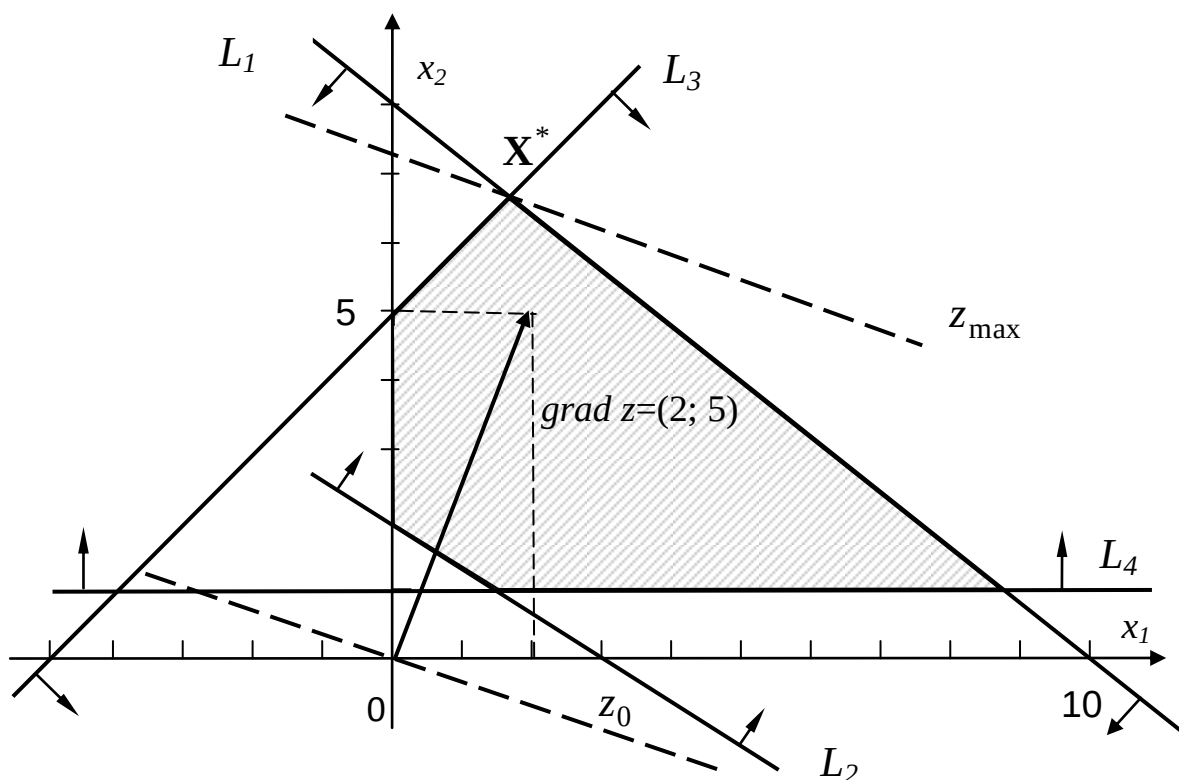


Рис. 1. Графический метод решения задачи линейного программирования

Критерием эффективности, по которому будем сравнивать все возможные планы, является значение функции цели $z(\mathbf{X}) = 2x_1 + 5x_2$. В данной задаче она исследуется на максимум.

Функция цели может достигать экстремального значения в одной из вершин многоугольника планов (или на его стороне, если таким условиям отвечают две угловых точки). Построим $\text{grad } z$, то есть вектор, указывающий направление наиболее быстрого роста функции. Координатами этого вектора для линейной функции являются коэффициенты перед ее аргументами. В соответствии с математической моделью задачи (1) имеем: $\text{grad } z = (2; 5)$. Теперь построим линию уровня функции z , то есть линию, на которой значение функции будет постоянным. По свойству градиента этот вектор также является и вектором нормали к линии уровня функции. Перпендикулярно вектору $\text{grad } z = (2; 5)$ проведем прямую через начало координат (см. рис. 1). Подставив координаты любой точки этой прямой в выражение для функции цели, определяем соответствующее ей значение функции. Так, для линии уровня, проходящей через начало координат, имеем $z_0 = 0$.

Поскольку функция цели исследуется на максимум, то перемещая линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\text{grad } z = (2; 5)$, необходимо определить вершину, через которую линия уровня выходит из многоугольника планов. Такой вершиной $\mathbf{X}^*$ является точка пересечения линий L_1 и L_3 . Именно ей отвечает оптимальный план, в соответствии с которым функция цели достигает максимума. Найдем координаты этой вершины $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$, решая систему уравнений, которые отвечают линиям L_1 и L_3 :

$$\begin{cases} 4x_1^* + 5x_2^* = 40, \\ -x_1^* + x_2^* = 5. \end{cases}$$

Для определения значений переменных x_1^* и x_2^* воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где определители Δ , Δ_1 и Δ_2 равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 40 - 25 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 40 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 40 = 60.$$

Получаем значения компонентов: $x_1^* = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; $x_2^* = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$.

Оптимальный план можно записать в виде матрицы-строки:

$\mathbf{X}^* = \left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3} \right)$. Этому оптимальному плану отвечает наибольшее значение функции цели:

$$z_{\max} = z(\mathbf{X}^*) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 5 \cdot \frac{20}{3} = \frac{110}{3}.$$

Задача 2. Цех производит продукцию двух видов A и B . При этом он использует три типа сырья, запасы которых ограничены и составляют соответственно $R_1 = 300$, $R_2 = 120$ и $R_3 = 252$ условных единиц. Прибыль, которую он получает от реализации единицы продукции каждого вида, равняется $c_1 = 20$ и $c_2 = 40$ условных единиц. По технологии, используемой для производства продукции, количество сырья каждого типа, необходимое для изготовления единицы продукции вида A , составляет $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 4$ и $\alpha_3 = 3$, а количество сырья, необходимое для изготовления единицы продукции вида B , составляет $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$ и $\beta_3 = 12$. С помощью симплексного метода определить оптимальный план производства, в соответствии с которым цех получал бы максимальную прибыль.

Решение. Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 количество единиц изделия A , через x_2 – изделия B , изготавливаемое цехом. Тогда прибыль от реализации готовой продукции представляет собой функцию двух переменных: $z = 20x_1 + 40x_2$. В данной задаче это и есть функция цели, которая исследуется на максимум:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max.$$

Поскольку количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превышать его запасов, то по каждому из трех видов сырья необходимо записать ограничения в виде неравенств, которые и образуют основную систему ограничений:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252. \end{cases}$$

Кроме того, количество произведенной продукции не может быть отрицательным, то есть существует ограничение на знак: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Вместе с основной системой ограничений они образуют систему ограничений, накладываемых на аргументы функции цели.

Итак, математическая модель задачи имеет вид:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Так как и функция цели, и условия ограничения являются линейными, то данная задача представляет собой задачу линейного программирования. Решением этой задачи являются такие значения x_1^* и x_2^* , которые удовлетворяют систему ограничений, и при которых функция цели z будет достигать максимального значения.

Для нахождения оптимального плана $X^*(x_1^*; x_2^*)$ воспользуемся симплексным методом, поскольку он является универсальным методом решения задач линейного программирования.

Применение симплексного метода предусматривает, что математическая модель должна отвечать определенным требованиям. В соответствии с этими требованиями основную систему ограничений, заданную в виде неравенств, необходимо привести к каноническому виду. Для этого в левую часть каждого из неравенств основной системы ограничений введем балансовую переменную, которая имеет смысл остатка сырья данного вида. Обозначим эти переменные x_3 , x_4 и x_5 , соответственно. Для них также существует требование неотрицательности.

Поскольку продают только готовую продукцию, а остатки сырья не подлежат реализации, то балансовые переменные входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

После введения дополнительных переменных математическая модель задачи приобретает канонический вид:

$$z = 20x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max, \quad (3')$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (4')$$

Балансовые переменные образуют базис, так как им соответствует единичная матрица, и модель может быть записана в симплексную таблицу. Строки I, II и III симплекс-таблицы (табл. 5) содержат значения параметров модели, в следующей строке записано значение функции цели и в последней строке таблицы – оценки плана.

Таблица 5

Симплексная таблица, соответствующая первой итерации

№ строки	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примечания
			$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	
I	$\vec{P}_3$	0	300	12	4	1	0	0	
II	$\vec{P}_4$	0	120	4	4	0	1	0	
III	$\vec{P}_5$	0	252	3	12	0	0	1	
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j = z_j - c_j$				-20	-40	0	0	0	$\Delta_1 < 0,$ $\Delta_2 < 0.$

Переменные, которые не входят в базис, являются свободными. Поскольку в базисном решении свободные переменные равны нулю,

находим значение базисных переменных опорного плана по столбцу $\bar{P}_0$ симплексной таблицы (см. табл. 5). Соответственно, получаем исходный опорный план $X_0 = (0; 0; 300; 120; 252)$. При этом $Z(X_0) = 0$. Этот план не является оптимальным, так как имеет отрицательные оценки: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$. Поэтому необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого в базис вводим вектор $\bar{P}_2$, которому соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка: $\Delta = \max\{20; 40\} = 40$.

Для того определения строки, по которой вектор $\bar{P}_2$ будем вводить в базис, вычислим симплексное отношение для координат этого вектора:

$$\Theta = \min \left\{ \frac{300}{4}; \frac{120}{4}; \frac{252}{12} \right\} = 21.$$

Таким образом, Θ показывает, что вектор $\bar{P}_2$ необходимо ввести в базис по III-ей строке, а из базиса, соответственно, выходит вектор $\bar{P}_5$. Осуществив преобразование, получим новую симплексную таблицу, в последнем столбце которой указаны действия над строками (табл. 6).

Таблица 6

Симплексная таблица, соответствующая второй итерации

№ строки	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примечания
			$\bar{P}_0$	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$	$\bar{P}_5$	
IV	$\bar{P}_3$	0	216	11	0	1	0	-1/3	I + (-4) · IV
V	$\bar{P}_4$	0	36	3	0	0	1	-1/3	II + (-4) · IV
VI	$\bar{P}_2$	40	21	1/4	1	0	0	1/12	III : 12
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			840	10	40	0	0	10/3	
$\Delta_j = z_j - c_j$				-10	0	0	0	10/3	$\Delta_1 < 0$

Новому опорному плану $X_1 = (0; 21; 216; 36; 0)$ отвечает значение целевой функции $z_1(X_1) = 840$. План не является оптимальным,

поскольку имеется отрицательная оценка $\Delta_1 = -10$. Отсюда следует, что в базис необходимо ввести вектор $\vec{P}_1$. Определим для его проекций симплексное отношение:

$$\Theta = \min \left\{ \frac{216}{11}; \frac{36}{3}; \frac{21}{1/4} \right\} = 12.$$

Итак, из базиса необходимо вывести вектор $\vec{P}_4$, после чего получим новый опорный план (табл. 7).

Таблица 7

Симплексная таблица, соответствующая третьей итерации

№ строки	Базис	$\vec{C}_{баз.}$	c_j	20	40	0	0	0	Примечания
			$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	
VII	$\vec{P}_3$	0	84	0	0	1	-11/3	8/9	IV + (-11) · VIII
VIII	$\vec{P}_1$	40	12	1	0	0	1/3	-1/9	V : 3
IX	$\vec{P}_2$	20	18	0	1	0	-1/12	1/9	VI + (-1/4) · VIII
$z_j = \vec{C}_{баз.} \cdot \vec{P}_j$			960	20	40	0	10/3	20/3	
$\Delta_j = z_j - c_j$				0	0	0	10/3	20/3	$\Delta_j \geq 0$

Поскольку все оценки плана X_2 неотрицательны ($\Delta_j \geq 0$), то он является оптимальным: $X^* = (12; 18; 84; 0; 0)$.

Этому плану соответствует максимальное значение функции цели: $z(X^*) = 960$.

Вывод: используя имеющиеся запасы сырья, цех может получить максимальную прибыль, которая составляет 960 условных единиц, если будет производить 12 единиц продукции A и 18 единиц продукции B. При этом остаток сырья первого вида составит 84 единицы, а сырье второго и третьего видов будет израсходовано полностью.

Задача 3. Для матричной игры "Покупатель – Продавец", заданной платежной матрицей Π :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0,5 & 3 \end{pmatrix},$$

вычислить нижнюю и верхнюю цены игры, определить цену игры и оптимальные стратегии каждого из игроков.

Решение. Согласно платежной матрице игрок A имеет две стратегии: A_1 и A_2 , в то же время игрок B имеет пять стратегий: B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 :

$$\Pi = \begin{array}{ccccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & \\ \hline A_1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & \\ A_2 & 1 & 3 & 4 & 0,5 & 3 & \end{array}$$

Элемент платежной матрицы $\Pi = (\pi_{ij})_{2 \times 5}$ определяет цену, которую получит продавец, если будет придерживаться своей i -й стратегии, заплатит покупатель, если будет придерживаться своей j -й стратегии.

Проверим, является ли эта игра игроу в чистых стратегиях, иными словами, имеет ли игра седловую точку, когда обоим игрокам выгоднее придерживаться чистых стратегий. Для этого сравним значения нижней и верхней цен игры.

Продавец, стремясь максимизировать свой минимальный гарантированный выигрыш, по каждой строке платежной матрицы (стратегии игрока A) выбирает наименьшие значения выигрышей и затем из них выбирает наибольшее. Такая стратегия называется максиминной, а полученное значение является нижней ценой игры:

$$\alpha = \max_i \left(\min_j (\pi_{ij}) \right) = \max_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 0,5.$$

Покупатель, стремясь минимизировать свой наибольший из возможных проигрышей, сравнивает самые большие значения по

каждому столбцу платежной матрицы (по каждой стратегии игрока B) и выбирает среди них наименьшее. Такая стратегия называется минимаксной а полученное значение является верхней ценой игры β .

$$\beta = \min_j \left(\max_i (\pi_{ij}) \right) = \min_j (2; 3; 5; 3; 4) = 2.$$

Поскольку для данной платежной матрицы $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. Это значит, что игра будет иметь решение в смешанных стратегиях, при этом цена игры ν удовлетворяет неравенство: $\alpha < \nu < \beta$.

Решим задачу с помощью графического метода. Это можно сделать, поскольку игрок A имеет только две стратегии. При этом игра рассматривается с позиции игрока A (рис. 2).

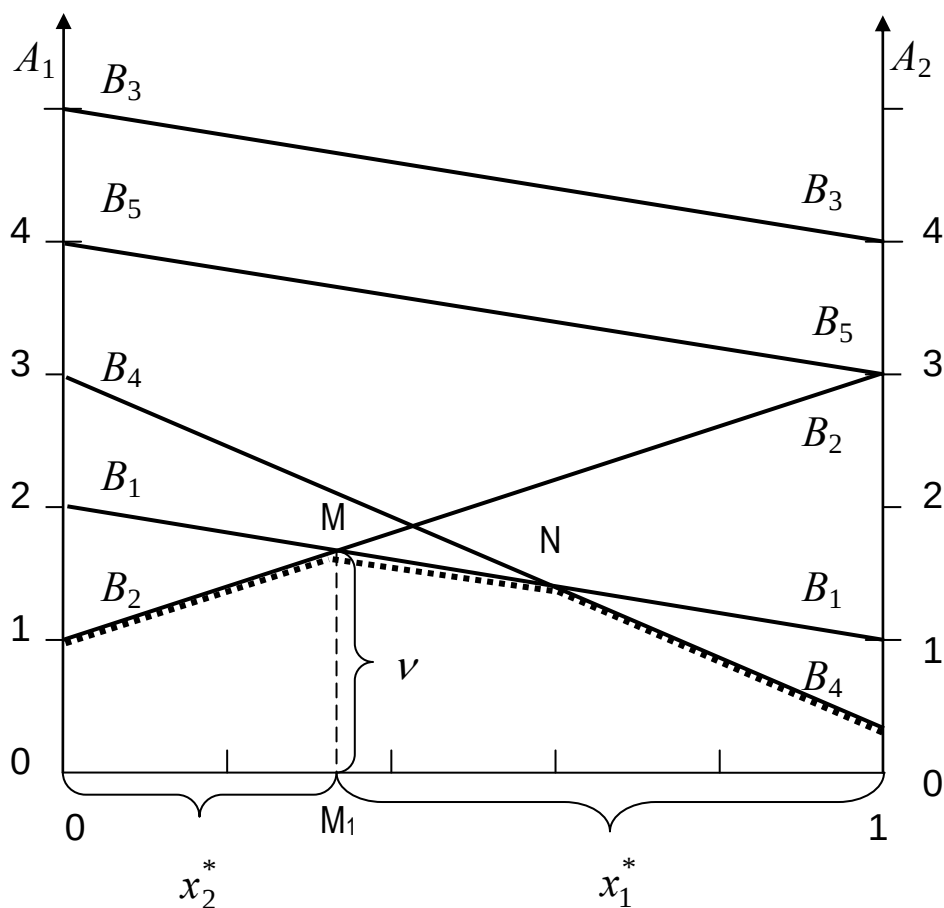


Рис. 2. Решение матричной игры графическим методом

На координатной плоскости вдоль оси абсцисс отложим отрезок единичной длины. Это ось вероятностей. Перпендикулярно ему проводим оси OA_1 и OA_2 , на которых откладываем выигрыши игрока A , отвечающие стратегиям A_1 и A_2 при условиях, что игрок B будет применять одну из своих возможных стратегий.

Например, если игрок B придерживается своей 1-й стратегии, то выигрыш, который получит игрок A , может быть равен 2, если он будет придерживаться своей 1-й стратегии, или может быть равен 1, если игрок A будет придерживаться своей 2-й стратегии. Откладываем эти значения по осям OA_1 и OA_2 , соответственно, и соединяем их отрезком прямой, который подписываем B_1B_1 . Аналогично строим отрезки прямых, соответствующих остальным четырем стратегиям покупателя. Ломаная линия B_2MNB_4 является нижней границей возможного выигрыша игрока A . На этой границе находим точку с максимальной ординатой. Видно, что это точка M , образованная пересечением линий B_2B_2 и B_1B_1 , которые отвечают стратегиям B_2 и B_1 игрока B . Это означает, что стратегии B_1 и B_2 являются активными стратегиями игрока B , других стратегий он не применяет. Ординатой точки M является цена игры, а отрезки OM_1 и M_1O , на которые проекция точки M разделяет единичный отрезок оси абсцисс, определяют вероятности x_1^* и x_2^* , с которыми игрок A будет применять стратегии A_1 и A_2 , соответственно. Целью графического решения является определение активных стратегий каждого из игроков, далее задача решается аналитически.

Итак, точка M находится на пересечении линий B_2B_2 и B_1B_1 . Тогда в активных стратегиях платежная матрица имеет вид:

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

По этой матрице оптимальную стратегию игрока A определяет вектор $\mathbf{X}^*(x_1^*; x_2^*)$, а игрока B – вектор $\mathbf{Y}^* = (y_1^*; y_2^*; 0; 0; 0)$. Для вычисления компонентов вектора $\mathbf{X}^*$ рассмотрим игру с позиции игрока

A , то есть, составим систему уравнений, в которых неизвестными являются вероятности x_1^* и x_2^* , с которыми игрок A придерживается своих активных стратегий, а также цена игры. Первые два уравнения этой системы в качестве коэффициентов при неизвестных x_1^* и x_2^* содержат элементы платежной матрицы активных стратегий, которые записаны в ее столбцах. Поскольку игрок A придерживается либо стратегии A_1 , или стратегии A_2 , то выбор или одной, или другой из этих стратегий – полная группа событий, соответственно, сумма вероятностей этих событий равна единице. Это и описывает третье уравнение системы. Получаем математическую модель задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* = \nu, \\ x_1^* + 3x_2^* = \nu, \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases} \quad (5, 6)$$

Решая систему уравнений (5, 6), находим оптимальный план относительно вероятностей, с которыми игрок A использует свои стратегии, и цену игры, соответствующие этому плану:

$$\begin{cases} x_1^* = 2/3, \\ x_2^* = 1/3, \\ \nu = 5/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{X}^* &= (2/3; 1/3), \\ \nu(\mathbf{X}^*) &= 5/3. \end{aligned}$$

Для вычисления вероятностей y_1^* и y_2^* , с которыми игрок B придерживается своих активных стратегий, запишем систему уравнений относительно неизвестных компонентов y_1^* и y_2^* вектора $\mathbf{Y}^*$ и цены игры, то есть, рассмотрим матричную игру с позиции игрока B . Коэффициентами в первых двух уравнениях системы являются элементы платежной матрицы активных стратегий, стоящие в ее строках. Третье уравнение системы описывает вероятность полной группы событий, поскольку игрок B выбирает или стратегию B_1 с

вероятностью y_1^* , или стратегию B_2 с вероятностью y_2^* и не выбирает другие стратегии. Получаем математическую модель задачи линейного программирования, которая является двойственной по отношению к задаче, представленной математической моделью (5, 6):

$$\begin{cases} 2y_1^* + y_2^* = \nu, \\ y_1^* + 3y_2^* = \nu, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases} \quad (5', 6')$$

Решая систему уравнений (5', 6'), находим компоненты оптимального плана двойственной задачи, соответствующие вероятностям активных стратегий игрока B , и значение функции цели, которое отвечает этому плану:

$$\begin{cases} y_1^* = 2/3, \\ y_2^* = 1/3, \\ \nu = 5/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{Y}^* &= (2/3; 1/3; 0; 0; 0), \\ \nu(\mathbf{Y}^*) &= 5/3. \end{aligned}$$

Видно, что значение цены игры, которое вычислялось согласно оптимальным стратегиям каждого из игроков, одинаково и совпадает с данными, которые были получены при анализе графического решения.

Примечание. Если платежная матрица (табл. 3) имеет индекс T , это означает что ее предварительно необходимо транспонировать, то есть, поменять местами строки и столбцы этой матрицы. Для матрицы, записанной в табл. 3, это означает, что она имеет два столбца и пять строк. Например,

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^T \Leftrightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$\alpha = \max_i \left(\min_j (\pi_{ij}) \right) = \max_i \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\beta = \min_j \left(\max_i (\pi_{ij}) \right) = \min_j (4; 5) = 4.$$

Поскольку $\alpha \neq \beta$, то матричная игра не имеет седловой точки и ее решение следует искать в смешанных стратегиях. При этом $2 < \nu < 4$.

Так как игрок B имеет две стратегии, а игрок A – четыре, то для выявления активных стратегий игрока A матричную игру необходимо решать графически с позиции игрока B , то есть, рассматривать двойственную задачу (рис. 3).

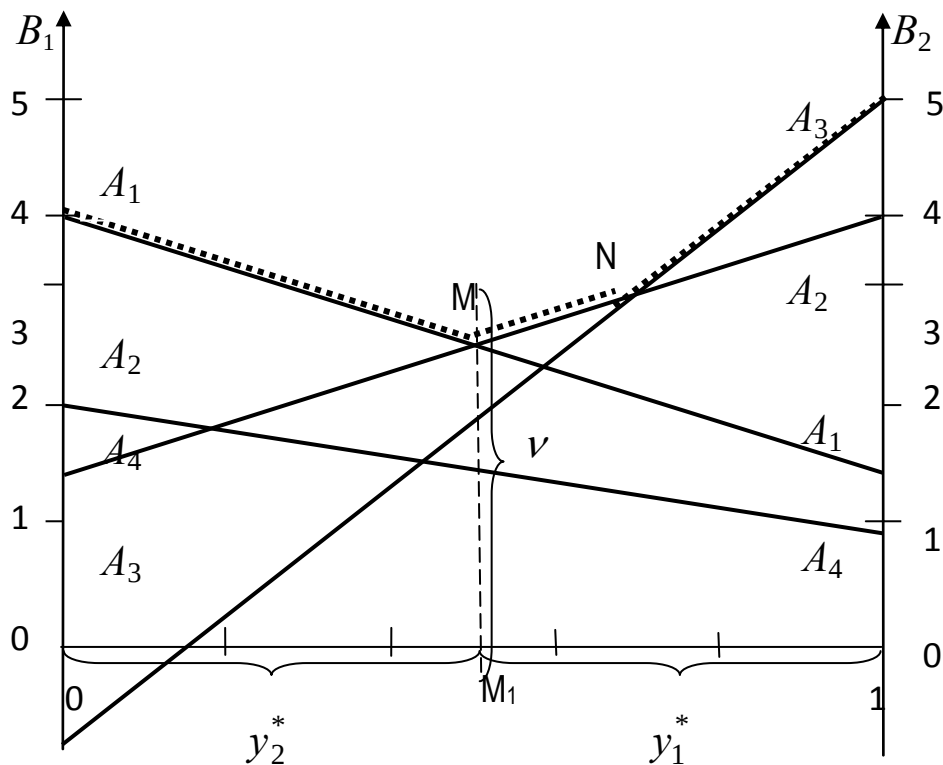


Рис. 3. Решение матричной игры с позиции игрока B

Ломаная A_1MNA_3 соответствует верхней границе проигрыша, ее наименьшая ордината соответствует точке M и равна ν . Следовательно, для игрока A активными являются стратегии A_1 и A_2 . Имеем матрицу активных стратегий:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь аналитически определяем вероятности, с которыми каждый из игроков будет придерживаться своих активных стратегий, и цену игры. Так, для игрока A :

$$\begin{cases} 4x_1^* + 2x_2^* = \nu; \\ 2x_1^* + 4x_2^* = \nu; \\ x_1^* + x_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0,5; \\ x_2^* = 0,5; \\ \nu = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{X}^* &= (0,5; 0,5; 0; 0), \\ \nu(\mathbf{X}^*) &= 3. \end{aligned}$$

Для игрока B :

$$\begin{cases} 4y_1^* + 2y_2^* = \nu; \\ 2y_1^* + 4y_2^* = \nu; \\ y_1^* + y_2^* = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = 0,5; \\ y_2^* = 0,5; \\ \nu = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{Y}^* &= (0,5; 0,5), \\ \nu(\mathbf{Y}^*) &= 3. \end{aligned}$$

Задача 4. На складах A_1 , A_2 и A_3 сосредоточена однородная продукция в количестве 180, 400, 280 условных единиц, соответственно. Потребности потребителей B_1 , B_2 , B_3 и B_4 в этой продукции составляют 240, 320, 120 и 180 условных единиц. Составить план перевозок, в соответствии с которым все запасы продукции были бы вывезены, все потребители – удовлетворены, а суммарная стоимость перевозок была бы минимальной, если тарифы перевозок заданы матрицей стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. Транспортная задача имеет решение, если она сбалансированная, то есть, суммарные потребности равны суммарным запасам. Так, суммарные запасы всех поставщиков составляют:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Это совпадает с общими потребностями всех потребителей:

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Таким образом, данная транспортная задача является закрытой, следовательно, она имеет решение. Для того, чтобы решить задачу, необходимо сначала составить какой-либо опорный план, который будем рассматривать как исходный.

Для составления исходного опорного плана существует несколько методов, из них наиболее распространенными являются метод северо-западного угла (диагональный метод) и метод минимальной стоимости.

В основу диагонального метода заложены следующие принципы. Распределение груза между потребителями начинают с левой верхней клетки (северо-западного угла) таблицы перевозок. Распределяем запасы первого поставщика A_1 . Вначале удовлетворяем потребности потребителя B_1 за счет запасов поставщика A_1 . Для этого в клетку x_{11} записываем меньшее из чисел a_1 и b_1 , то есть $x_{11} = \min \{a_1; b_1\}$.

Если $x_{11} = a_1$, тогда поставщик A_1 израсходовал весь ресурс и в дальнейшем распределении груза он не может принимать участия, следовательно, этот поставщик исключается из рассмотрения. Если при этом спрос потребителя B_1 не удовлетворили в полном объеме, тогда в клетку, которая находится во второй строке первого столбца, направляют груз от поставщика A_2 в количестве: $x_{21} = \min \{a_2; b_1 - x_{11}\}$.

Наоборот, если $x_{11} = b_1$, то потребитель B_1 получил нужный ему объем поставок, тогда из оставшихся ресурсов поставщика A_1 удовлетворяют нужды потребителя B_2 , решая при этом следующую задачу: $x_{12} = \min \{a_1 - x_{11}; b_2\}$ и т. д. Такое распределение проводят до тех пор, пока все товары не будут выведены, а все потребители не будут

удовлетворены. Такое возможно, если спрос равен предложению, то есть, задача сбалансирована.

Клетки соответствующего столбца или строки, в которых потребности потребителя удовлетворены и запасы израсходованы, заполняют нулями или прочерками или оставляют пустыми. Следует подчеркнуть, что при составлении опорного плана методом северо-западного угла не учитывается стоимость перевозки единицы груза, поэтому этот план может быть далеким от оптимального.

В отличие от метода северо-западного угла метод минимальной стоимости построен на анализе матрицы стоимости перевозок, поэтому позволяет построить опорное решение, которое является достаточно близким к оптимальному, или даже сразу найти оптимальный план. Алгоритм метода минимальной стоимости предполагает ряд однотипных шагов, на каждом из которых заполняется именно так клетка, которой отвечает минимальная стоимость перевозки единицы груза c_{ij} .

Построение исходного опорного плана начинают с определения клетки, которая имеет наименьшую стоимость перевозок c_{ij} , и туда делают поставку объемом $x_{ij} = \min \{a_i; b_j\}$.

После этого исключают строку, то есть, заполняют нулями, если запасы поставщика израсходованы, или исключают столбец, то есть, заполняют нулями, если потребности потребителя полностью удовлетворены. Далее снова выбирают свободную клетку с наименьшей стоимостью, и заполняют ее. Процесс продолжают до тех пор, пока все запасы не будут израсходованы и все потребности – удовлетворены.

Если m и n достаточно велики, то применяют следующие разновидности метода минимальной стоимости:

метод минимальной стоимости в строке, то есть, распределяют груз a_1 последовательно по минимальной стоимости первой строки, затем груз a_2 – по минимальной стоимости второй строки и т. д.;

метод минимальной стоимости в столбце, то есть, распределяют груз b_1 по минимальной стоимости в первом столбце, затем груз b_2 – по минимальной стоимости во втором столбце и т. д.;

метод двойного предпочтения, то есть, выделяют клетки с минимальной стоимостью в каждой строке и клетки с минимальной стоимостью в столбце и вначале заполняют клетки с двойной отметкой, затем с одной отметкой. Остальные клетки заполняют любым другим методом.

Как правило наиболее близкое к оптимальному решению дает метод минимальной стоимости и метод двойного предпочтения.

Перейдем к решению нашей задачи. Оформим исходные данные о запасах поставщиков, потребностях потребителей и стоимости перевозок в виде таблицы и найдем исходный опорный план X_0 , применив для этого метод северо-западного угла (табл. 8).

Таблица 8

Исходный опорный план X_0

Поставщики	Потребители				Запасы, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22 180	15	40	18	180
A_2	9 60	12 320	32 20	16	400
A_3	11	38	10 100	14 180	280
Потребности, b_j	240	320	120	180	860 860

Общая стоимость перевозок по этому плану составляет:

$$z(X_0) = 22 \cdot 180 + 9 \cdot 60 + 12 \cdot 320 + 32 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 14 \cdot 180 = 12500.$$

Полученный план является невырожденным, так как число занятых клеток таблицы $m + n - 1 = 6$, где m – число поставщиков ($m = 3$), n – число потребителей ($n = 4$).

С помощью метода потенциалов проверим, является ли найденный план оптимальным.

Для этого каждому поставщику поставим в соответствие потенциал u_i , а каждому потребителю – потенциал v_j . Потенциалы участникам присваиваем таким образом, чтобы для каждой занятой клетки таблицы выполнялось условие: $u_i + v_j = c_{ij}$. Разность между суммой потенциалов и стоимостью называется оценкой плана:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Если при этом для каждой свободной клетки таблицы выполняется условие $u_i + v_j \leq c_{ij}$ ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$), то есть, нет положительных оценок, то найденный план является оптимальным.

Составим таблицу потенциалов (табл. 9).

Таблица 9

Таблица потенциалов для плана X_0

$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 45$	$v_4 = 49$
$u_1 = 0$	22	15 25	40 45	18 49
$u_2 = -13$	9	12	32	16 36
$u_3 = -35$	-13 11	-10 38	10	14

Например, присвоим поставщику A_1 потенциал $u_1 = 0$ (в принципе, ему можно присвоить любое значение). В клетку $i = 1$, $j = 1$ сделана поставка (клетка занята). Для этой клетки $c_{11} = 22$, и по этому значению вычисляем потенциал потребителя B_1 , который равен: $v_1 = 22 - u_1 = 22$. Находим следующую занятую клетку, для которой уже известен потенциал одного из участников. Такой клеткой является $i = 2$, $j = 1$, для нее $c_{21} = 9$. Соответственно $u_2 = 9 - v_1 = 9 - 22 = -13$. И так далее, пока по занятым клеткам не будут найдены потенциалы всех участников. Затем для свободных клеток вычисляем оценки плана.

Так как для плана X_0 оценка $\Delta_{13} = 24 > 0$ и оценка $\Delta_{23} = 48 > 0$, то данный план не является оптимальным, его необходимо улучшить, перераспределив груз. Для этого в клетку, которой соответствует наибольшая положительная оценка (это клетка $i = 1, j = 4$), ставим знак "+", и составляем замкнутый контур, вершины которого соответствуют заполненным клеткам (табл. 10).

План X_0	180	$-\Theta$			$+\Theta$	
	60	$+\Theta$	320	20	$-\Theta$	
				100	$+\Theta$	$-\Theta$

Таким образом, необходимо перераспределить по замкнутому циклу 20 единиц груза, добавляя их уже имеющимся поставкам в тех клетках, которым соответствуют положительные вершины контура перевозок, и отнимая в тех, которым соответствуют отрицательные вершины. В результате такого перераспределения суммарные поставки по строкам и столбцам не изменяются, поэтому в дальнейшем из таблиц перевозок исключают последнюю строку, в которой записаны потребности каждого потребителя, и последний столбец, в котором записаны запасы.

После проделанной операции получаем новый план X_1 (табл. 11), в соответствии с которым стоимость равна $Z(X_1) = 12500 - 620 = 11\,880$.

Таблица 11

План перевозок X_1

План X_1	160			20
	80	320		
			120	160

Проверим план X_1 на оптимальность (табл. 12).

Таблица 12

Таблица потенциалов для плана X_1

v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
u_i				
$u_1 = 0$	22	15 25	40 14	18
$u_2 = -13$	9	12	32 11	16 5
$u_3 = -4$	11 18	38 21	10	14

План X_1 не является оптимальным, так как имеет положительные оценки: $\Delta_{12} = 10$ и $\Delta_{31} = 8$. Определяем, что $\Delta = \max\{10; 8\} = 10$, то необходимо сделать поставку в клетку $i = 1, j = 2$. Контур, по которому производится перераспределение, представлен в табл. 13. По нему перераспределяем груз $\Theta = \min\{160; 320\} = 160$ единиц груза. Переход к новому плану даст выигрыш функции цели $\Delta Z = \Delta \cdot \Theta = 10 \cdot 160 = 1\,600$, то есть, $Z(X_2) = 11\,880 - 1\,600 = 10\,280$.

Таблица 13

Улучшение плана X_1 путем перераспределения груза по циклу

План X_1	$- \Theta$ 160	$+ \Theta$		20
	$+ \Theta$ 80	$- \Theta$ 320		
			120	160

Получаем план перевозок X_2 (табл. 14).

Таблица 14

План перевозок X_2

План X_2		160		20
	240	160		
			120	160

Проверим план X_2 на оптимальность (табл. 15).

Таблица 15

Таблица потенциалов для плана X_2

v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 15$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
u_i				
$u_1 = 0$	22 12	15	40 14	18
$u_2 = -3$	9	12	32 11	15 16
$u_3 = -4$	8 11	38 11	10	14

Поскольку все оценки плана X_2 положительны, то он является оптимальным. Общая стоимость перевозок по этому плану минимальна и равна:

$$Z_{\min} = Z(X^*) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 = 10\,280.$$

Как видим, значение функции цели, рассчитанное непосредственно по этому плану, совпадает с тем значением стоимости, которое было получено в результате последовательного ее перерасчета при переходе к каждому последующему опорному плану.

Составим исходный опорный план этой же задачи методом минимальной стоимости. Анализ матрицы C показывает, что наименьшая стоимость перевозок $c_{21} = 9$ отвечает клетке $i = 2, j = 1$. Соответственно, в эту клетку делаем первую поставку. Ее размер определяем, сравнивая потребности потребителя B_1 и возможности поставщика A_2 . Получаем: $x_{21} = \min \{240; 400\} = 240$.

Следующей клеткой, открытой для поставки, является клетка $i = 3, j = 3$, так как для нее $c_{33} = 10$. Соответственно, в нее делаем поставку $x_{33} = \min \{120; 280\} = 120$.

Следующей является клетка $i = 3, j = 1$, так как для нее $c_{31} = 11$, но потребитель B_1 уже получил все необходимые ему 240 единиц груза от поставщика A_2 , поэтому исключается из дальнейшего рассмотрения.

Теперь клеткой, открытой для поставки, является клетка $i = 2, j = 2$, так как для нее $c_{22} = 12$. Поставка в эту клетку возможна, однако поставщик A_2 частично уже израсходовал свои запасы. Учитывая это при определении размера поставки в данную клетку, получаем значение: $x_{22} = \min \{320; 400 - 240\} = 160$. Продолжая заполнение клеток таблицы перевозок в соответствии с анализом матрицы стоимостей, получаем исходный опорный план, представленный в табл. 16. Его нет необходимости проверять на оптимальность, так как сравнивая этот план с уже найденным оптимальным планом X^* , приходим к выводу, что для данной задачи при построении исходного

опорного плана методом минимальной стоимости был сразу найден оптимальный план.

Таблица 16

Исходный опорный план X_0

Поставщики	Потребители								Запасы, a_i
	B_1		B_2		B_3		B_4		
A_1		22		15		40		18	180
			160				20		
A_2		9		12		32		16	400
	240		160						
A_3		11		38		10		14	280
					120		160		
Потребности, b_j	240		320		120		180		860
									860

Таким образом, оптимальным для заданных условий является план перевозок

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 0 & 20 \\ 240 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 160 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует минимальная общая стоимость перевозки груза, которая составляет 10 280 условных единиц.

Рекомендованная литература

Егоршин А. А. Математическое программирование : учебник / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х. : Изд "ИНЖЭК", 2006. – 438 с.

Економіко-математичні методи і моделі : практич. посібн. / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю. Місюра. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 319 с.

Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

Исследование операций в экономике : учебн. пособ. для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.

Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб. : Изд. "Питер", 2000. – 208 с.

Кучма М. І. Математичне програмування: приклади і задачі : навч. посібн. / М. І. Кучма. – Львів : "Новий світ 2000", 2008. – 344 с.

Малярець Л. М. Робоча програма навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів за напрямом підготовки 0501 "Економіка і підприємництво" всіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 44 с.

Малярець Л. М. Економіко-математичне моделювання / Л. М. Малярець : навч. посібн. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 312 с.

Малярець Л. М. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів всіх галузей знань усіх форм навчання / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

Экономико-математические методы и модели : учебн. пособ. / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, В. Н. Жихар и др. ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : БГЭУ, 1999. – 413 с.

**Методичні рекомендації
до виконання контрольних робіт
з навчальної дисципліни
"ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ"
для іноземних студентів
галузі знань 0305
"Економіка та підприємництво"
заочної форми навчання
(рос. мовою)**

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.